Algebra Feladatmegoldó Szeminárium

Abért Miklós és Frenkel Péter

2011/2012 II. félév, 10. feladatsor

1. Legyenek d és e köbmentes pozitív egészek. Mikor izomorfak a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{d})$ és $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{e})$ testek?

2. Van-e olyan véges csoport, amelynek kommutátorrészcsoportja izomorf $\mathrm{Sym}(4)$-gyel?

3. Legyen $f : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ lineáris és $f(AB) = f(BA)$ minden $A, B \in M_n(\mathbb{C})$-re. Ekkor $f = c \cdot \mathrm{tr}$.

4. Tegyük fel, hogy az M modulus egy η endomorfizmusához van olyan m és k, hogy $\ker \eta^{m+1} = \ker \eta^m$ és $\mathrm{im}\ \eta^{k+1} = \mathrm{im}\ \eta^k$. Ekkor a minimális ilyen m és k megegyezik.

5. Véges test véges bővítésénél mind a nyom, mind a norma szürjektív függvény. (Az x elem nyoma $\sum \sigma(x)$, normája $\prod \sigma(x)$, ahol σ a Galois-csoport elemein fut végig.)

6. Pozitív szemidefinit önadjungált mátrix determinánsa legfeljebb az átlóelemek szorzata.

7. (a) Az

$$R = \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ vagy } a, b, c, d \in \mathbb{Z} + 1/2\} < \mathbb{H}$$

   gyűrűben $\mathbb{Z}$ egyetlen prím eleme sem marad prím.

   (b) Vezessük le ebből, hogy minden pozitív egész szám négy négyzetszám összege.

8. Ha egy részbenrendezett halmazban minden részhalmaznak van szuprémuma, akkor minden részhalmaznak van infimuma is.

9. Minden Boole-algebra izomorf egy kompakt Hausdorff-tér nyílt-zárt részhalmazainak Boole-algebrájával.