Algebra 4

3. feladatsor

1. Ha $L|K$ testbővítés, $\alpha \in L$, akkor α és α^2 ugyanakkor algebraiak, ill. transzcendensek K felett.

2. Igazoljuk, hogy $a + bi$ pontosan akkor algebrai szám, ha a is és b is az $(a, b \in \mathbb{R})$.

3. Legyen α algebrai, τ transzcendens szám. Mutassuk meg, hogy $\alpha + \tau$ transzcendens. Az $\alpha\tau$ szám mikor algebrai?

4. A $\pi + 3$, $5\pi + 6$, $\pi + \sqrt{2}$, $\pi^2 + 2\pi + 2$, $\sqrt{\pi}$ számok közül melyek transzcendensek? (Elhisszük, hogy π transzcendens.)

5. (a) Határozzuk meg $\mathbb{Q}$ fölött a következő algebrai számok kanonikus polinomját: $\sqrt{5}$, $\sqrt{5} + 11$, $\sqrt[29]{3}$, $\sqrt[29]{9}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$, $\sqrt[25]{3}$, $\sqrt[25]{9}$.

   (b) Határozzuk meg a $|\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}|$ fokot, ha β értéke: $\sqrt[29]{3} + 2009$, illetve $103 + \sqrt[5]{2009} + 77\sqrt[5]{2009^2} + 84\sqrt[5]{2009^3} - 18566\sqrt[5]{2009^4}$

6. $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \cap \Omega = R_d$.

7. $2\cos(2\pi/n)$ algebrai egész.

8. Mi $\cos(2\pi/9)$ kanonikus polinomja?

9. Legyen D ferdetest, S gyűrű. Mutassuk meg, hogy bármely $D \to S$ homomorfizmus vagy injektív, vagy azonosan nulla.

10. Határozzuk meg $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ automorfizmuscsoportját.

11. A $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ testek, ahol $d \neq 1$ a négyzetmentes egészeken fut végig (d lehet pozitív és lehet negatív is),

    (a) páronként nem izomorfak,

    (b) mindegyik pontosan kétféleképpen ágyazható $\mathbb{C}$-be, és

    (c) a két beágyazás képe ugyanaz.

12. Legyen a az $x^3 + 2x + 2$ polinom egyetlen valós gyöke. Írjuk fel az a^4 és $1/a$ számokat 1, a és a^2 racionális együtthatós lineáris kombinációjaként!

13. (a) Keressünk $\mathbb{F}_2$ felett másod-, harmad-, illetve negyedfokú irreducibilis polinomot.

    (b) Milyen elemszámú testek létezése következik ennek alapján?

    (c) Írjuk fel a négyelemű test összeadó- és szorzótábláját!

14. (Beadható!) Legyen p prím és $\varepsilon \in \mathbb{C}$ primitív p-edik egységgyök. Milyen ismert gyűrűvel izomorf a $\mathbb{Z}[\varepsilon]/(1 - \varepsilon)$ faktorgyűrű?