Algebra Feladatmegoldó Szeminárium

Abért Miklós és Frenkel Péter

2011/2012 II. félév, 8. feladatsor

1. Legyen T egy $a \times b$-es tábla. Jelölje A a T elemeinek azon permutációit, amelyek megtartják az elemek első koordinátáját, és jelölje B azon permutációkat, amelyek megtartják a második koordinátát. Mutassuk meg, hogy $ABA = \mathrm{Sym}(T)$.

2. Egy G csoport linearitási foka legyen a minimális m, amire G beágyazható egy $\mathrm{GL}(m, K)$ mátrixcsoportba, ahol K test. Lássuk be, hogy az $\mathrm{Alt}(n)$ alternáló csoportok linearitási foka tart végtelenhez.

3. Lássuk be, hogy minden $2d$-reguláris véges gráf Schreier gráffá tehető.

4. Mutassuk meg, hogy az egész számok összes páros, véges tartójú permutációja (finitary alternáló csoport) egyszerű csoportot alkot.

5. Lássuk be, hogy $\mathrm{Sym}(n)$-ben két véletlen permutáció 1-hez tartó valószínűséggel tranzitív csoportot generál.

6. A $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ gyűrű $\mathrm{Alt}(n)$-invariáns elemeinek gyűrűjét generálják az elemi szimmetrikus polinomok és a $\delta = \sum_{\pi \in A_n} x_{1\pi}^{n-1} x_{2\pi}^{n-2} \ldots x_{(n-1)\pi}$ polinom.

7. Vezessük le a 6. feladatsor 10. feladatából, hogy minden n-re van végtelen sok $kn + 1$ alakú pozitív prím.

8. Pozitív szemidefinit önadjungált mátrix permanense nemnegatív. (A permanenst a determinánshoz hasonlóan definiáljuk, csak éppen minden kifejtési tag + előjellel van.)

9. Melyek azok a testek, amelyek multiplikatív csoportja ciklikus?