Algebra Feladatmegoldó Szeminárium

Abért Miklós és Frenkel Péter

2011/2012 II. félév, 9. feladatsor

1. Legyen G lokálisan véges, összefüggő gráf. Mutassuk meg, hogy az, hogy G-n a véletlen séta végtelen sokszor visszatér-e, független a kezdőponttól.
2. Lássuk be, hogy $\mathrm{Sym}(2^n)$ 2-Sylow részcsoportja izomorf az n magasságú gyökeres bináris fa automorfizmuscsoportjával.
3. Legyen G lokálisan véges, végtelen csúcstranzitív gráf. Mutassuk meg, hogy G-ben van végtelen geodetikus.
4. Mutassuk meg, hogy a finitary szimmetrikus csoport nem áll elő mint véges sok Abel-féle részcsoportjának komplexusszorzata.
5. Lássuk be, hogy az n magasságú gyökeres bináris fa automorfizmuscsoportjának minimális generátorszáma n.
6. Legyen p prím, $f \in \mathbb{F}_p[x]$ legfeljebb $p-1$ fokú polinom pontosan k nemnulla együtthatóval, és $(x-1)^k | f$. Ekkor $f = 0$.
7. Felírható-e valós együtthatós polinomok négyzetösszegeként az
$$1 - 3x^2y^2 + x^4y^2 + x^2y^4$$
polinom?
8. (a) Az
$$R = \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ vagy } a, b, c, d \in \mathbb{Z} + 1/2\} < \mathbb{H}$$
gyűrű balról euklideszi, azaz $\alpha, \beta \in R$, $\beta \neq 0$ esetén van $\gamma, \delta \in R$ úgy, hogy $\alpha = \gamma\beta + \delta$ és $|\delta| < |\beta|$.
(b) Igaz-e ez a $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}k < \mathbb{H}$ gyűrűre is?
9. Minden legalább hatelemű véges hálónak van hatelemű részhálója.