

Algebra3

1. gyakorlat

1. Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű. Igazoljuk, hogy

$$GL_n(R) = \{A \in M_n(R) \mid \det A \in U(R)\}.$$

(Fel szabad használni a determinánsok szorzástételét.)

2. Igazoljuk, hogy $GL_n(K)$ semmilyen K testre és $n \geq 2$ egészre sem kommutatív.
3. Legyen p prím és legyen \mathbb{F}_p a modulo p maradékosztályok teste. Mennyi $|GL_n(\mathbb{F}_p)|$?
4. Legyen G csoport, $a, b \in G$. Igazoljuk, hogy az $ax = b$ és $xa = b$ egyenletek mindegyikének pontosan egy megoldása van G -ben. Ezért G szorzótáblája ún. *latin négyzet*: G minden eleme pontosan egyszer szerepel minden sorban és minden oszlopban.
5. Ha a_1, \dots, a_k az $[n]$ páronként különböző elemei, akkor (a_1, \dots, a_k) jelöli azt a permutációt, amely a_1 -et a_2 -be, a_2 -t a_3 -ba, \dots , a_k -t a_1 -be viszi, és az $[n]$ többi elemét helyben hagyja. Ezt a permutációt k -as ciklusnak nevezzük.

(a) Igazoljuk, hogy $(12 \dots k) = (12)(13) \dots (1k)$.

(b) Mutassuk meg, hogy páros hosszú ciklus páratlan, páratlan hosszú ciklus pedig páros permutáció!

(c) Az S_8 alábbi elemei közül melyek egyenlők?

$$(145)(63)(78), (2)(514)(87)(36), (541)(63)(78)$$

(d) Határozzuk meg az alábbi permutációk ciklusfelbontását, inverziós számát és paritását!

$$\begin{pmatrix} 12345678 \\ 85247361 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 12345678 \\ 85243761 \end{pmatrix}.$$

6. A $\pi, \rho \in S_n$ permutációkat *felcserélhetőnek* mondjuk, ha $\pi\rho = \rho\pi$.

A $\pi \in S_n$ permutáció *tartóján* a

$$\text{supp } \pi = \{k \in [n] : k\pi \neq k\}$$

halmazt értjük.

Igazoljuk, hogy két diszjunkt tartójú permutáció mindig felcserélhető.

7. Mely $\pi \in S_n$ permutációk cserélhetők fel az $(12 \dots n)$ ciklussal?
8. Ha $\pi \in S_n$, akkor π előáll transzpozíciók szorzataként. Legalább hány tényező kell egy adott π permutáció ilyen előállításához?
9. Van-e minden $0 \leq k \leq \binom{n}{2}$ esetén olyan $\pi \in S_n$, amelyre $\ell(\pi) = k$?
10. Ha $\pi \in S_n$, akkor π előáll $(i, i+1)$ alakú transzpozíciók szorzataként. Legalább hány tényező kell egy adott π ilyen előállításához?