Algebra3

2. gyakorlat

1. Lehet-e két permutáció felcserélhető, ha tartóik metszete egyelemű?
2. Legyen g egy n-edrendű elem a G csoportban. Mennyi g^k rendje?
3. Milyen elemrendek fordulnak elő a Z_n, D_n, Q, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ csoportokban?
4. Mi egy diszjunkt ciklusfelbontásban felírt permutáció rendje S_n-ben?
5. Keressük meg a kvaterniócsoport, illetve S_3 összes részcsoportját.
6. Keressük meg A_4-ben az összes negyedrendű részcsoportot!
7. Legyen G egy csoport, H_1 és H_2 részcsoportok G-ben. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy $H_1 \cup H_2$ is részcsoport legyen G-ben.
8. Van-e olyan végtelen csoport, melyben minden elem rendje véges?
9. (a) Legyen G egy Abel-csoport. Bizonyítsuk be, hogy a véges rendű elemek G-ben részcsoportot alkotnak (ez G ún. torziórészcsoportja).

   (b) Mutassuk meg, hogy az $U(\mathbb{C})$ csoport torziórészcsoportja éppen az egységgyökökből áll, tehát végtelen sok eleme van.

   (c) Igaz marad-e az (a)-beli állítás, ha nem tesszük fel, hogy G Abel?
10. Legyen $A, B \leq G$.

    (i)
    $$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}.$$

    (ii) AB pontosan akkor részcsoport, ha $AB = BA$.
11. Legyen G csoport, $K \subseteq G$. Igazoljuk, hogy K pontosan akkor baloldali mellékosztály (egy alkalmas részcsoport szerint), ha jobboldali mellékosztály (egy alkalmas részcsoport szerint).
12. Legyen K test. Igazoljuk, hogy a K^n tér $x \mapsto Ax + b$ alakú transzformációi, ahol $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ és $b \in K^n$, csoportot alkotnak a kompozícióra nézve. (Ez K^n affin csoportja.)
13. Van-e minden csoportnak legbővebb kommutatív részcsoportja?
14. Ki lehet-e tölteni egy negyedsík alakú kockás papírt természetes számokkal úgy, hogy minden természetes szám pontosan egyszer szerepeljen minden sorban és minden oszlopban?

1. zh: november 5., 14:05, Északi tömb 0.81 (SG csoportjai) és 0.89 (FP csoportja)
2. zh: december 10., 14:05, Északi tömb 0.81 (SG csoportjai) és 0.89 (FP csoportja)
pótzh: december 14., 16:00, Északi tömb 0.81 (minden csoport)