Algebra3

3. gyakorlat

1. Hány szimmetriája van a szabályos tetraédernek, oktaédernek, dodekaédernek, ikozaédernek?

2. Ha a $\pi \in S_n$ permutácó ciklusfelbontása
$$\pi = (a_{11}a_{12}\dots a_{1k_1})(a_{21}a_{22}\dots a_{2k_2})\dots(a_{r1}a_{r2}\dots a_{rk_r}),$$
és
$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1\rho & 2\rho & \dots & n\rho \end{pmatrix},$$
akkor mi lesz $\rho^{-1}\pi\rho$ ciklusfelbontása?

3. Ha ismerjük $\pi \in S_n$ ciklusszerkezetét, hogyan dönthető el, hogy π-nek van-e négyzetgyöke S_n-ben?

4. Ha $\pi, \rho \in S_n$ diszjunkt tartójúak, attól még nem lesz feltétlenül $\ell(\pi\rho) = \ell(\pi) + \ell(\rho)$. Ha viszont minden $i \in \operatorname{supp}\pi$ és minden $j \in \operatorname{supp}\rho$ esetén $i < j$, akkor már igen.

5. Igazoljuk, hogy A_n-et generálják a hármas ciklusok.

6. Ha K komplexus a G csoportban, és K bármely két eleme felcserélhető, akkor $\langle K\rangle$ kommutatív csoport.

7. Legyen $(G, +)$ Abel-csoport és $K \subseteq G$. Igazoljuk, hogy a K generálta részcsoport
$$\{n_1a_1 + \dots + n_ra_r | r = 0, 1, \dots; a_1, \dots, a_r \in K \text{ páronként különbözőek}; n_1, \dots n_r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}.$$

8. Van-e véges generátorrendszer a $(\mathbb{Q}, +)$ csoportban?

9. Legyen $d|n$. Ekkor Z_n-ben hány d-edrendű elem van?

10. Legyen φ az Euler-féle függvény. Igazoljuk, hogy minden n-re
$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

11. (i) Legyen $(G, +)$ Abel-csoport. Legyen $k \in \mathbb{Z}$. Igazoljuk, hogy kA is és $\{a \in A | ka = 0\}$ is részcsoport.

    (ii) Legyen $(G, \cdot)$ csoport. A négyzetelemek mindig részcsoportot alkotnak? És a legfeljebb másodrendű elemek?

12. Legyen G csoport, $\emptyset \neq K \subseteq G$. Igazoljuk, hogy K pontosan akkor baloldali mellékosztály (egy alkalmas részcsoport szerint), ha $KK^{-1}K \subseteq K$.

13. Adjunk meg minél többféle, legfeljebb 11 elemű csoportot!