

Algebra3

4. gyakorlat

- Legyen N normálosztó G -ben, $\nu : G \rightarrow G/N$ a természetes homomorfizmus, $g \in G$.
 - Ha g, g^2, g^3, \dots egyike sincs N -ben, akkor $g\nu$ végtelen rendű.
 - Ha g -nek van pozitív egész kitevőjű hatványa N -ben, akkor $g\nu$ véges rendű, a rendje osztja g rendjét, és egy n egészre $g^n \in N$ pontosan akkor teljesül, ha $o(g\nu)|n$.
 - $N \cap \langle g \rangle$ normálosztó $\langle g \rangle$ -ban, és indexe $o(g\nu)$.
- A $Z_2, Z_3, Z_4, V, D_3, D_4, D_6, A_2, A_3, A_4, S_2, S_3, GL_2(\mathbb{F}_2), Q$ véges csoportok közül melyik melyikkel izomorf?
- Ha egy csoportban minden elem négyzete 1, akkor a csoport kommutatív, és elemszáma 2-hatvány vagy végtelen.
- Ha p prím, akkor minden $2p$ rendű csoportban van p rendű elem.
- Minden 4-elemű csoport izomorf Z_4 -gyel vagy V -vel.
- Legyen
$$G = \{A \in GL_3(\mathbb{F}_3) \mid a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1, a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0\}.$$
Ekkor $G \leq GL_3(\mathbb{F}_3)$, $|G| = 27$, minden elem köbe 1, de G nem kommutatív.
- Legyen G csoport. Bizonyítsuk be, hogy $x \in G$ és $y \in G$ pontosan akkor konjugáltak G -ben, ha van olyan $a \in G$ és $b \in G$, hogy $x = ab$ és $y = ba$.
- Legyen K test. A K^n tér affin csoportjában (lásd 2/12. feladat) $GL_n(K)$ és $(K^n, +)$ részcsoporthok. Melyik normálosztó? Mi a szerinte vett faktorcsoporth?
- A szabályos tetraéder szimmetriacsoportja izomorf S_4 -gyel. Az irányítástartó szimmetriák részcsoporthja az S_4 mely részcsoporthjának felel meg?
- A Q kvaterniócsoport nem kommutatív, de minden részcsoporthja normálosztó.
- Milyen ismert csoporttal izomorf a $Q/\{\pm 1\}$ faktorcsoporth?
- Legyen K test és
$$SL_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \det A = 1\}$$
(ez a *speciális lineáris csoport*). Igazoljuk, hogy $GL_n(K)$ -ban $SL_n(K)$ normálosztó. Milyen ismert csoporttal izomorf a faktorcsoporth?
- Szürjektív homomorfizmusnál generátorrendszer képe generátorrendszer.
- Egy G csoport automorfizmusai mindig csoportot alkotnak (ez G automorfizmuscsoportja).
 - Milyen ismert csoporttal izomorf az automorfizmuscsoportja a Z_p^n (ahol p prím), Q , illetve S_3 csoportoknak?
- Ha egy csoportban egyetlen k rendű részcsoporth van, akkor az normálosztó.