Algebra3

6. feladatsor

1. Ha M az R gyűrű egy maximális ideálja, akkor az R/M faktorgyűrűnek pontosan két ideálja van.

2. Legyen
$$R = \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{H}.$$
Igazoljuk, hogy R unitális részgyűrűje $\mathbb{H}$-nak.

Gyűrű centrumán *azon elemek halmazát értjük, amelyek a gyűrű minden elemével felcserélhetők.*

3. $Z(R) \leq R$.

4. $Z(\mathbb{H}) =?$

Az $a + bi + cj + dk$ kvaternió valós része *a. Egy kvaternió* tisztán képzetes, *ha valós része nulla.*

5. A tisztán képzetes kvaterniók részgyűrűt alkotnak-e $\mathbb{H}$-ban?

6. A tisztán képzetes kvaterniók terét azonosítsuk $\mathbb{R}^3$-mal úgy, hogy i, j, k a kanonikus bázisnak feleljen meg. Mi a tisztán képzetes kvaterniók szorzásának geometriai jelentése?

Gyűrűk direkt szorzatát *úgy definiáljuk, hogy minden műveletet koordinátánként végzünk.*

7. $Z(R_1 \times R_2) = Z(R_1) \times Z(R_2)$.

8. Ha R_1 és R_2 egységelemes gyűrűk, akkor $U(R_1 \times R_2) = U(R_1) \times U(R_2)$.

Két gyűrű izomorf, *ha van köztük művelettartó bijekció.*

9. Ha n és m relatív prím pozitív egészek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{nm}$ (mint gyűrűk).

10. Hány nem-izomorf 5 elemű gyűrű van?

11. Legyen $R = C[0, 1]$ a $[0, 1]$ intervallumon folytonos valós függvények halmaza. Igazoljuk, hogy R egységelemes, kommutatív gyűrű a pontonkénti műveletekre nézve. Nullosztómentes-e? $U(R) =?$

12. Egy egységelemes $R_0 = (R, +, \cdot)$ gyűrűben definiáljunk egy új összeadást:
$$a \oplus b = a + b - 1,$$
és egy új szorzást:
$$a \odot b = a + b - ab.$$
Bizonyítandó, hogy $R_1 = (R, \oplus, \odot)$ is gyűrű. Izomorf-e az új R_1 gyűrű a régi R_0-lal?