Algebra3

7. feladatsor

1. (Unitális) gyűrűhomomorfizmusok-e a következő leképezések?

   (a) $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $a + bi \mapsto a$;

   (b) $\mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$, $a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

2. Hány olyan kvaternió van, amelynek a négyzete -1?

3. Hány injektív $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$ unitális homomorfizmus van?

4. Legyen K test. Mutassuk meg, hogy $M_n(K)$ egységelemes algebra K felett. Mennyi a dimenziója? Mi a centruma?

5. Legyen K test és A egységelemes K-algebra.

   (i) A minden balideálja K-lineáris altér.

   (ii) Ha $\dim_K A < \infty$, akkor A bal-Artin.

6. Legyen D ferdetest. Az $M_2(D)$ gyűrű nullosztómentes-e? Keressünk benne olyan balideált, amely nem jobbideál!

7. Keressük meg a $\mathbb{Z}$ és a $K[x]$ gyűrűk összes ideálját (K test)! Állapítsuk meg azt is, hogy melyik ideál melyiket tartalmazza! Artin-gyűrű-e a $\mathbb{Z}$ és a $K[x]$?

8. Határozzuk meg a $\mathbb{Z}$ és a $K[x]$ gyűrűk maximális ideáljait.

9. Legyen K test. Bizonyítsuk be, hogy a $K[x]$ gyűrűben a nulla konstans tagú polinomok maximális ideált alkotnak. Adjuk meg ennek az M ideálnak egy (minél kisebb) generátorrendszerét! Mi a $K[x]/M$ faktorgyűrű?

10. Mi lesz $\mathbb{Z}$-ben az a és b számok által generált ideál? Mi az (a) és (b) ideálok metszete? Hogy működik mindez $K[x]$-ben?

11. Algebrai szám-e $\mathbb{Q}$ felett $\cos(2\pi/9)$?

12. Ha $L|K$ testbővítés, $\alpha \in L$, és α^2 algebrai K felett, akkor α is az.

13. Legyen a az $x^3 + 2x + 2$ polinom egyetlen valós gyöke. Írjuk fel az a^4 és $1/a$ számokat 1, a és a^2 racionális együtthatós lineáris kombinációjaként!

14. (a) Határozzuk meg $\mathbb{Q}$ felett a következő algebrai számok minimálpolinomját: 13, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5} + 11$, $\sqrt[29]{3}$, $\sqrt[29]{9}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$, $\sqrt[25]{3}$, $\sqrt[25]{9}$.

    (b) Határozzuk meg a $|\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}|$ fokot, ha β értéke: $\sqrt[29]{3} + 2009$, illetve $103 + \sqrt[5]{2009} + 77\sqrt[5]{2009^2} + 84\sqrt[5]{2009^3} - 18566\sqrt[5]{2009^4}$.

    (c) Felhasználva, hogy π ($\mathbb{Q}$ felett) transzcendens, igazoljuk, hogy $24 + 18\pi + 35\pi^9 - 43\pi^{2009}$, $\dfrac{24 + 18\pi + 35\pi^9 - 43\pi^{2009}}{41 + 8\pi^5 + 5\pi^{99} - 466\pi^{2001}}$ és $\dfrac{24 + 18\pi + 35\pi^9 - 43\pi^{2009}}{41 + 8\pi^5 + 5\pi^{99} - 466\pi^{2009}}$ is transzcendens.