

Algebra3 ALKALMAZOTT MATEMATIKUS

1. VIZSGA

I. rész. Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Az itt elérendő minimális pontszám 8.

1. Adja meg a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ permutáció felbontását diszjunkt ciklusok szorzatára!
2. Adja meg (az elemek felsorolásával) a Q kvaterniócsoport egy kételemű és egy négyelemű részcsoportját!
3. Legyenek A és B a Z_2^4 csoport négyelemű részcsoportjai, melyek metszete kételemű. Hány elemű az AB komplexusszorzat?
4. Hány szimmetriája van egy olyan téglatestnek, amely nem kocka, de van négyzetlapja?
5. Adjuk meg az S_5 szimmetrikus csoport két olyan elemét, amelyek együtt generálják S_5 -öt!
6. Mondja ki a Frobenius-tételt.
7. Az alábbi gyűrűk közül melyek egyszerű gyűrűk? \mathbb{Z} ; $\mathbb{Z}/(11)$; $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1)$; $\mathbb{Z}/(15)$.
8. Hány olyan balideál van $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben, amely tartalmazza $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ -et, de nem tartalmazza $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ -t?
9. Hány eleme van a $\mathbb{Z}/(6, 10)$ faktorgyűrűnek?

10. Mondja ki a testbővítések fokára vonatkozó szorzástételt.
11. Izomorfia erejéig hány különböző, legfeljebb harmadfokú bővítése van \mathbb{R} -nek?
12. A következők közül mi(k) lehet(nek) egy olyan 3-karakterisztikájú test elemszáma(i), amelynek pontosan 3 különböző részteste van: 9, 27, 33, 81, 83?
13. Hány olyan elem van egy 16-elemű testben, amelynek a multiplikatív rendje prímszám?
14. Melyek izomorfak a következő gyűrűk közül? (A) $\mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x + 1)$;
(B) $\mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x^2 + 1)$; (C) $\mathbb{F}_3[x]/(x^4 + x + 1)$; (D) $\mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.
15. Definiálja a normális bővítés fogalmát.
16. Az $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ellenőrző mátrixú bináris Hamming-kód esetén mi az a kód-szó, amelytől a $(0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0)^\top$ szó legfeljebb egy helyen tér el?

II. rész. Ebben a részben a válaszokat indokolni kell. Ügyeljünk a precíz fogalmazásra. A megszerezhető összpontszám $6 + 6 = 12$, a megszerzendő minimális pontszám 6.

- (A) Bizonyítsa be, hogy minden véges test multiplikatív csoportja ciklikus.
- (B) Mondja ki és igazolja Cayley (csoportokról szóló) tételét.

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább 8, a másodikra pedig a 6 pont, akkor a végső osztályzatot az összpontszám alapján az alábbiak szerint számolhatjuk ki:

14 – 17 : 2

18 – 20 : 3

21 – 23 : 4

24 – 28 : 5