

NÉV: \_\_\_\_\_

ELTE AZONOSÍTÓ: \_\_\_\_\_

## Algebra3: 2. vizsgadolgozat

2012. január 18.

**I. rész.** Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Az itt elérendő minimális pontszám 8.

1. Az  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ellenőrző mátrixú bináris Hamming-kód esetén mi az a kódszó, amelytől a  $(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0)^\top$  szó legfeljebb egy helyen tér el?

2. Bontsuk diszjunkt ciklusok szorzatára a  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  permutációt!

3. Hány konjugált osztálya van az  $S_4$  szimmetrikus csoportnak?

4. Hány elemű az  $S_9$  szimmetrikus csoportnak az  $(14)$ ,  $(47)$ ,  $(97)$  transzpozíciók által generált részcsoportja?

5. Hány elemű a  $Q$  kvaterniócsoportnak a centruma szerinti faktorcsoportja?

6. Hány részcsoportja van a 12 elemű ciklikus csoportnak?

7. Mondja ki a (csoportelméleti) Cayley-tételt.

8. Az  $M_2(\mathbb{R})$  mátrixgyűrűben az alábbiak közül mely részhalmozatok balideálok?

- (A) {nulla alsó sorú mátrixok};  
(B) {nulla első oszlopú mátrixok};  
(C) {két egyenlő oszlopból álló mátrixok};  
(D) {nulla determinánsú mátrixok}

9.  $M_2(\mathbb{R})$ -ben a  $\begin{pmatrix} 11 & 22 \\ 33 & 44 \end{pmatrix}$  mátrixot tartalmazó legszűkebb (kétoldali) ideál mint  $\mathbb{R}$  fölötti vektortér dimenziója:

10. Hány elemű a  $\mathbb{Z}/(6, 10, 15)$  faktorgyűrű?

11. Mondja ki a véges testek multiplikatív csoportjáról szóló tételt.

12. Hány  $\mathbb{C}$ -vel izomorf részteste van a kvaterniók ferde-  
testének?

13. Ha egy véges testben a (szorzásra nézve) hetedrendű elemek száma 6, akkor a test elemszáma a következő lehet: (A) 8, (B) 9, (C)  $2^{11}$ , (D)  $2^{111}$ ;

a lehetséges esetek betűjele(i):

14. Hányadfokú irreducibilis osztói vannak az  $x^4 + x + 1$  polinomnak a  $2^{12344444}$  elemű test fölött?

15. Mely(ek) nullosztómentes(ek) a következő gyűrűk közül?  
(A)  $\mathbb{Z}_2[x]/(x^4 + x + 1)$ ; (B)  $\mathbb{Z}_{12}[x]/(x^4 + x + 1)$ ;  
(C)  $\mathbb{Z}_3[x]/(x^4 + x + 1)$ ; (D)  $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 - x + 1)$ .

16. Definiálja a felbontási test fogalmát.

**II. rész.** Ebben a részben a válaszokat indokolni kell. Ügyeljen a precíz fogalmazásra. A megszerezhető összpontszám 12.

17. Fogalmazza meg és bizonyítsa be az egymás utáni testbővítések fokának szorzástételét.

(6 pont)

18. Legyenek  $G_1, \dots, G_k$  csoportok. Írja le és igazolja annak szükséges és elegendő feltételét, hogy a  $G_1 \times \dots \times G_k$  direkt szorzat (véges vagy végtelen) ciklikus csoport legyen. (6 pont)

*A hátlapra!*

---

*OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább 8, a másodikra pedig a 6 pont, akkor a végső osztályzatot az összpontszám alapján az alábbiak szerint számolhatjuk ki:*

Összpontszám	Osztályzat
14 – 17	2
18 – 20	3
21 – 23	4
24 – 28	5