Jelentés a 2016. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat 2016. október 24. és november 2. között rendezte meg a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, továbbá azok vehettek részt, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 2016-ban fejezték be.

A verseny lebonyolítására a Társulat a következő bizottságot kérte fel: Füredi Zoltán (elnök), Frenkel Péter (titkár), Biró András, Csikós Balázs, Halász Gábor, Keleti Tamás, Komjáth Péter, Móri Tamás, Terpai Tamás.

A bizottság október 14-i ülésén kiválasztotta a 10 kitűzendő feladatot. A bizottság köszönetét fejezi ki mindazoknak, akik feladatot javasoltak a versenyre. A kitűzött feladatokat javasolták: 1. Ruzsa Imre, 2. Király Zoltán, 3. Totik Vilmos, 4. Füredi Zoltán, 5. Buczolich Zoltán, 6. Biró András és Halász Gábor, 7. Szabó Endre és Szűcs András, 8. Augustin Fruchard és Bárány Imre, 9. Lovász László, 10. Székely J. Gábor.

A verseny eredményes volt, 15-en indultak rajta, összesen 65 megoldást nyújtottak be. Ezek ötletességükben helyenként a kitűzők eredeti megoldásait is túlszárnyalták.

A versenybizottság december 2-i ülésén megállapította, hogy egyetlen versenyző oldotta meg — apró hiányosságoktól eltekintve — mind a tíz feladatot. Ennek alapján

*I. díj*ban és 100 000 forint pénzjutalomban részesül

Nagy János, az ELTE végzett, matematikus mesterszakos hallgatója, jelenleg a Közép-európai Egyetem Matematika és Alkalmazásai doktori programjának elsőéves hallgatója.

Egy versenyző oldott meg hat és fél feladatot (1., 2., 3., 7., 8., 9., valamint részeredmény a 4. és 5. feladatban). Ennek alapján

*II. díj*ban és 50 000 forint pénzjutalomban részesül

Ágoston Tamás, az ELTE másodéves, matematikus mesterszakos hallgatója.

Három versenyző oldott meg lényegében öt vagy öt és fél feladatot. Ennek alapján

*III. díj*ban és fejenként 30 000 forint pénzjutalomban részesül

Fehér Zsombor, az ELTE másodéves, matematika alapszakos hallgatója,

Frankl Nóra, az ELTE végzett, matematikus mesterszakos hallgatója, jelenleg a London School of Economics and Political Science elsőéves doktorandusz hallgatója és

Maga Balázs, az ELTE harmadéves, matematika alapszakos hallgatója.

Közülük Fehér Zsombor megoldotta az 1., 2., 3., 5., 8. feladatot; a 2. feladatra adott megoldása kiemelkedő. Frankl Nóra megoldotta 2., 3., 4., 8., valamint apróbb, javítható hibáktól eltekintve az 5. feladatot, és hiányos megoldást adott az 1. feladatra. Maga Balázs megoldotta a 2., 3., 5., 8., valamint — kis hiányosságtól eltekintve — a 4. feladatot.

Három versenyző oldott meg három feladatot (és ért el esetleges további részeredményt). Ennek alapján

*dicséret*ben részesül

Csernák Tamás, az ELTE harmadéves, matematika alapszakos hallgatója,

Szőke Tamás, az ELTE másodéves, matematika alapszakos hallgatója és

Williams Kada, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. évfolyamos tanulója.

Közülük Csernák Tamás megoldotta a 3., 5. és 8. feladatot, és részeredményt ért el a 2. feladatban. Szőke Tamás a 2., 3. és 8., Williams Kada pedig a 3., 4. és 8. feladatot oldotta meg.

A díjakat a Morgan Stanley Magyarország Elemző Kft. támogatta, ezért a versenybizottság köszönetét fejezi ki.

Feladatok

1. Milyen α komplex számhoz van olyan teljesen multiplikatív, komplex értékű f számelméleti függvény, amelyre
$$\sum_{n<x} f(n) = \alpha x + O(1)\,?$$

2. Legyen $K = (V, E)$ véges, egyszerű, teljes gráf. Legyen d pozitív egész. Legyen $\phi\colon E \to \mathbb{R}^d$ olyan leképezése az élhalmaznak az euklideszi térbe, hogy az értékkészlet bármely pontjának őset képe összefüggő gráfot alkot az egész V csúcshalmazon, továbbá a K bármely háromszögének éleihez rendelt pontok egy egyenesen vannak. Mutassuk meg, hogy ϕ értékkészlete egy egyenesen van.

3. Igazoljuk, hogy minden P valós együtthatós polinomhoz és minden pozitív egész n-hez van olyan Q valós együtthatós polinom, amelyre $P^2(x) + Q^2(x)$ osztható $(1 + x^2)^n$-nel.

4. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan valós számokbol álló $a(1)$, $a(2)$, $\ldots$, $a(n)$, $\ldots$ sorozat, amelyre
$$a(n+m) \le a(n) + a(m) + \frac{n+m}{\log(n+m)} \tag{1}$$
minden $m, n \ge 1$ egészre, és amelyre az $\{a(n)/n : n \ge 1\}$ halmaz mindenütt sűrű az egész számegyenesen.

   Megjegyzés: de Bruijn és Erdős tétele kimondja, hogy ha a fenti egyenlőtlenség a jobboldal utolsó tagja helyett $f(n+m)$-mel teljesül, ahol $f(n) \ge 0$ monoton növő és
$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n)/n^2 < \infty, \tag{2}$$
akkor $a(n)/n$ konvergál, vagy $(-\infty)$-hez tart.

5. Létezik-e olyan szakaszonként lineáris, folytonos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre bármilyen $a_n \in [0,1]$, $n \in \mathbb{Z}$ kétirányban végtelen sorozathoz van olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy
$$\limsup_{K\to\infty} \frac{\#\{k \le K \,:\, k \in \mathbb{N},\ f^k(x) \in [n, n+1)\}}{K} = a_n$$

teljesül minden $n \in \mathbb{Z}$-re, ahol $f^k = f \circ \ldots \circ f$ az f függvény k-adik iteráltja?

6. Legyen $\Gamma(s)$ az Euler-féle gamma-függvény. Konstruáljunk olyan nem azonosan eltűnő $F(s)$ páros egészfüggvényt, amelyre az $F(s)/\Gamma(s)$ hányados korlátos a $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$ jobb félsíkban.

7. Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{C}P^\infty$ tér feletti tautologikus (univerzális) komplex vonalnyaláb önmagával vett r-szeres direkt összegének egységgömbnyalábja homotopikusan ekvivalens $\mathbb{C}P^{r-1}$-gyel.

8. Milyen $n > 1$ egész számra van olyan téglalap, amely fölbontható n darab hozzá hasonló, de páronként nem egybevágó téglalapra?

9. Ha $p_0, \ldots, p_d \in \mathbb{R}^d$, legyen

$$S(p_0, \ldots, p_d) = \left\{ \alpha_0 p_0 + \cdots + \alpha_d p_d : \alpha_i \leq 1,\ \sum_{i=0}^{d} \alpha_i = 1 \right\}.$$

   Legyen π tetszőleges valószínűségeloszlás $\mathbb{R}^d$-n, és válasszuk a $p_0, \ldots, p_d$ pontokat függetlenül π szerint. Bizonyítsuk be, hogy $\pi(S(p_0, \ldots, p_d))$ várható értéke legalább $1/(d+2)$.

10. Legyenek X és Y független, azonos eloszlású véletlen pontok az $\mathbb{R}^3$-beli egységgömbfelületen. Az X milyen eloszlása mellett lesz X és Y (euklideszi) távolságának várható értéke maximális?

Megoldások

A megoldás szerzőjét csak akkor jelezzük, ha eltér a feladat szerzőjétől és nem tagja a bizottságnak.

1. Akkor és csak akkor van ilyen függvény, ha $\alpha = 1$ vagy $|\alpha| < 1$.

   (1) A feltétel miatt f korlátos, és ha egyszer $f(n^k) = f(n)^k$ korlátos, akkor $|f(n)| \leq 1$, így $|\alpha| \leq 1$.

   (2) Tegyük fel, hogy $\alpha \neq 1$; belátjuk, hogy $|\alpha| < 1$. Válasszunk olyan m számot, amelyre $f(m) \neq 1$. Az

$$F(x) = \sum_{n<x} f(n)$$

összegből m többszöröseinek adaléka

$$f(m)F(x/m) = \frac{\alpha f(m)}{m}x + O(1),$$

tehát az m-mel nem oszthatóké

$$\alpha\left(1 - \frac{f(m)}{m}\right)x + O(1).$$

Az ilyen számok száma $x(1-1/m)+O(1)$, és mindegyik adaléka legfeljebb 1, tehát

$$|\alpha|\left|1 - \frac{f(m)}{m}\right| \le 1 - \frac{1}{m}.$$

A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\left|1 - \frac{f(m)}{m}\right| > 1 - \frac{1}{m},$$

tehát $|\alpha| < 1$.

(3) Most konstruálunk ilyen függvényt. Az $\alpha = 0, 1$ esetek triviálisak; legyen $0 < |\alpha| < 1$. A függvényt olyan formában készítjük, hogy választunk egy véges P prímhalmazt, $f(p) = 1$ ha $p \notin P$ és $|f(p)| < 1$ ha $p \in P$.

Belátjuk, hogy minden ilyen függvényre

$$F(x) = \beta x + O(1), \tag{3}$$

ahol

$$\beta = \prod_{p\in P} \frac{p-1}{p-f(p)}. \tag{4}$$

Ez fennáll az azonosan 1 függvényre, és ezt a tulajdonságot megőrzi az alább két művelet. Az egyik, hogy egy p prímen $f(p)$ értékét kicseréljük 0-ra, a többi prímnél változatlanul hagyjuk. Az új függvényt és összegzési függvényét f'-vel, illetve F'-vel jelölve

$$F'(x) = F(x) - f(p)F(x/p) = \beta' x + O(1),\ \ \beta' = \beta(1 - f(p)/p)).$$

A másik, hogy egy olyan prímnél, ahol $f(p) = 0$, kicseréjük egy c számra, $|c| < 1$. Ekkor

$$F'(x) = F(x) + cF(x/p) + c^2F(x/p^2) + \ldots = \beta' x + O(1),\ \beta' = \beta\frac{p}{p-c}.$$

Ha az O konstansa C volt, most legfeljebb

$$C(1 + |c| + |c^2| + \ldots) = \frac{C}{1-|c|}$$

lesz. E két művelet ismételt alkalmazásával a fent leírt függvények megkaphatók.

(4) Most a P halmazt és az $f(p)$ értékeket kell úgy választani, hogy $\beta = \alpha$ legyen. Legyen $\alpha = e^{-z}$, ahol $z = a + ib, a > 0$. A (2) szorzat tényezői között szétosztjuk ezt $1/(p-1)$-gyel arányosan, vagyis

$$p - f(p) = (p-1)e^{\delta z/(p-1)}$$

lesz, ahol

$$\delta = \left(\sum_{p\in P} 1/(p-1)\right)^{-1}.$$

Ez megadja $f(p)$ értékeit. Belátjuk, hogy $|f(p)| < 1$ lesz, ha δ elég kicsi, ahol az „elég kicsi" értelme csak z-től függ.

A fenti képletből

$$f(p) = p - (p-1)e^{\delta z/(p-1)}.$$

Tudjuk, hogy

$$e^{\delta z/(p-1)} = 1 + \frac{\delta z}{p-1} + O\left(\frac{\delta^2}{p^2}\right),$$

tehát

$$f(p) = 1 - \delta z + O\left(\frac{\delta^2}{p}\right). \tag{5}$$

Továbbá

$$|1 - \delta z|^2 = (1-\delta a)^2 + (\delta b)^2 < 1 - \delta a$$

ha $\delta < a/(a^2 + b^2)$, így

$$|1 - \delta z| < \sqrt{1 - \delta a} < 1 - \delta a/2,$$

ami (3) miatt elég kis δ választással garantálja, hogy $|f(p)| < 1$. Mivel a prímek reciprokösszege divergens, δ tetszőlegesen kicsivé tehető.

Megjegyzések. 1. (Ágoston Tamás) Ha $\alpha \neq 0$, akkor csak véges sok olyan prím lehet, amelyre $|f(p)| < 1$. Ha ugyanis $p_1, \ldots, p_k, \ldots$ ilyen prímek, akkor véve egy olyan k kitevőt, amelyre $|f(p_j)|^k < \varepsilon$ fennáll $j \leq m$ esetén, majd egy olyan n számot, melyre

$$p_1^k|n+1,\ \ldots,\ p_m^k|n+m,$$

elérjük, hogy

$$|F(n+m) - F(n)| \leq |f(n+1)| + \ldots + |f(n+m)| < \varepsilon m$$

legyen, miközben a feltevés szerint ez $= |\alpha|m + O(1)$.

2. A feladat kitűzője nem tudja (és nehéznek véli eldönteni), hogy van-e olyan, a feladatbeli tulajdonsággal bíró függvény, amelyre $\alpha \neq 0$ és valamely p prímre $|f(p)| = 1$, $f(p) \neq 1$. Tagadó válasz esetén a fent leírt konstrukció megadja az összes szóbajövő megoldást.

3. (Halász Gábor) A feltétel szükségessége az alábbi módon is látható. Ha létezik az α középérték, akkor parciális összegzéssel

$$\alpha = \lim_{\sigma \to 1+0} (\sigma - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^\sigma} = \lim_{\sigma \to 1+0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^\sigma}}{\zeta(\sigma)} = \lim_{\sigma \to 1+0} \prod_p \frac{1 - \frac{1}{p^\sigma}}{1 - \frac{f(p)}{p^\sigma}},$$

$$|\alpha| = \lim_{\sigma \to 1+0} \prod_p \frac{1 - \frac{1}{p^\sigma}}{\left|1 - \frac{f(p)}{p^\sigma}\right|}.$$

Mivel minden tényező ≤ 1, csak egyet megtartva

$$|\alpha| \leq \lim_{\sigma \to 1+0} \frac{1 - \frac{1}{p^\sigma}}{\left|1 - \frac{f(p)}{p^\sigma}\right|} = \frac{1 - \frac{1}{p}}{\left|1 - \frac{f(p)}{p}\right|} < 1,$$

ha van $f(p) \neq 1$ érték.

Megoldotta Ágoston Tamás, Fehér Zsombor és Nagy János. Részeredményt ért el Frankl Nóra, Lenger Dániel és Markó Ádám. Hibás egy dologozat.

2. (Fehér Zsombor) Legyen $U \subset V$ olyan csúcshalmaz, amelyre létezik olyan $p \in U$ és $v \in V \setminus U$, hogy $u \in U$-ra $\phi(uv) = A$ állandó, és $u \in U \setminus \{p\}$-re $\phi(up) = B$ szintén állandó, de $A \neq B$. Ha ϕ állandó az egész élhalmazon, akkor készen vagyunk, ha nem állandó, akkor nyilván létezik ilyen tulajdonságú kételemű U halmaz. Rögzítsünk egy olyan U, p, v-t, melyben U elemszáma maximális.

   Megmutatjuk, hogy ϕ értékkészlete az AB egyenesen van. Tegyük fel indirekt módon, hogy $C \notin AB$ eleme az értékkészletnek. Legyen T azon $t \in V \setminus U$ csúcsok halmaza, melyekre $\phi(ut) = D$ állandó $u \in U$-ra, és D rajta van az AC egyenesen, de $D \neq C$.

   Világos, hogy T diszjunkt U-tól, és hogy T nem üres, hiszen $v \in T$. Mivel $\phi^{-1}(C)$ összefüggő, ezért létezik olyan T-ből kilépő rs él ($r \in T$, $s \in V \setminus T$), melyre $\phi(rs) = C$. Mivel $r \in T$, ezért $u \in U$-ra $\phi(ur) = R$ állandó, ahol $R \in AC$, $R \neq C$. Így $s \notin U$.

   Legyen $\phi(sp) = S$. A prs háromszög miatt R, C, S egy egyenesen lévő pontok. Továbbá, minden $u \in U \setminus \{p\}$-re az ups háromszög miatt $B, S, \phi(us)$, az urs háromszög miatt pedig $R, C, \phi(us)$ egy egyenesen vannak. Ez $B \notin AC = RC$ miatt azt jelenti, hogy $\phi(us) = RC \cap BS = S$.

   Tehát $s \in V \setminus U$ olyan csúcs, hogy minden $u \in U$-ra $\phi(us) = S$ állandó, ahol $S \in AC$. Mivel $s \notin T$, ezért ez csak úgy lehet, ha $S = C$. Ekkor azonban $U' = U \cup \{r\}$, $p' = r$, $v' = s$ ellentmond U maximalitásának. Ezzel készen vagyunk.

   Megjegyzés. Az állítás akkor is igaz marad, ha ϕ értékkészlete egy hurokmentes matroid, és az „egy egyenesen van” kifejezést helyettesítjük a „legfeljebb 2 rangú halmazt alkot” kifejezéssel.

   Kiemelkedő megoldást adott Fehér Zsombor és Nagy János. Megoldotta Ágoston Péter, Ágoston Tamás, Frankl Nóra, Garamvölgyi Dániel, Maga Balázs és Szőke Tamás. Hibás négy dolgozat.

3. Feltehetjük, hogy $P = 1$, ha ugyanis $1 + Q^2(x)$ osztható $(1 + x^2)^n$-nel, akkor $P^2(x) + (PQ)^2(x)$ is osztható $(1 + x^2)^n$-nel.

   Ha $n = 1$, akkor $Q(x) = x$ megfelelő. Ha $n = 2$, akkor $Q(x) = x(x^2 + 3)/2$ megfelelő, hiszen $Q(i) = i$ és $Q'(x) = 3(x^2 + 1)/2$ miatt i kétszeres gyöke $1 + Q^2$-nek.

Ha már $1+Q^2(x)$ osztható $(1+x^2)^n$-nel, akkor $1+Q^2(Q(x))$ osztható $(1+Q^2(x))^n$-nel, ez pedig $(1+x^2)^{n^2}$-nel. Mivel a 2 ismételt négyzetre emelésével tetszőlegesen nagy számot kaphatunk, a feladat állítása igaz.

Megoldotta Ágoston Tamás, Csernák Tamás, Fehér Zsombor, Frankl Nóra, Garamvölgyi Dániel, Kiss Melinda, Lenger Dániel, Maga Balázs, Markó Ádám, Nagy János, Szőke Tamás, Williams Kada, valamint — javítható hibával — Kaprinai Balázs is.

4. Legyen

$$c(n) = \begin{cases} 0 & n \le e \\ \log\log n & n \ge e, \end{cases}$$

és legyen $b(n) = nc(n)$. Azt állítjuk, hogy alkalmas $C > 0$ abszolút konstanssal tetszőleges $n > k > 0$ egészekre

$$-b(k) - b(n-k) + b(n) \le Cn/\log n. \tag{6}$$

Valóban, a $b(n)$ függvény konvex, tehát $b(k)+b(n-k) \ge 2b(n/2)$. Ha $n \ge 6$, akkor

$$\begin{aligned} b(n)-2b(n/2) &= n\log\log n - 2(n/2)\log\log(n/2) = n\log\left(\frac{\log n}{\log(n/2)}\right) \\ &= n\log\left(1+\frac{\log 2}{\log n - \log 2}\right) < \frac{n}{\log_2 n - 1} < C\frac{n}{\log n}. \end{aligned}$$

A C konstanst alkalmasan megnövelve, (6) teljesülni fog $n = 2,3,4,5$ esetén is.

Legyen

$$a(n) = n(c(n) - \overline{c(n)})/C = (b(n) - n\overline{c(n)})/C,$$

ahol $\overline{x}$ az x-hez legközelebbi négyzetszám. Mivel a $\overline{c(n)}$ sorozat monoton növekvő, ezért $a(n)$ kielégíti az (1) egyenlőtlenséget. Könnyű belátni, hogy az $\{a(n)/n : n \ge 1\}$ halmaz mindenütt sűrű az egész számegyenesen.

Megjegyzés. Valós számok egy $a(1)$, $a(2)$, $\ldots$, $a(n)$, $\ldots$ végtelen sorozata *szubadditív*, ha

$$a(n+m) \le a(n) + a(m)$$

minden $m, n \geq 1$ egészre. Sok bevezető analíziskönyvben szerepel feladatként vagy tételként Fekete lemmája: ha $(a(n))$ szubadditív, akkor az $(a(n)/n)$ sorozatnak létezik limesze (amely véges vagy $-\infty$, sőt megegyezik a sorozat infimumával).

Legyen $f(1), \ldots, f(n), \ldots$ egy nemnegatív számokból álló sorozat. Valós számok egy $a(1)$, $a(2)$, $\ldots$, $a(n)$, $\ldots$ végtelen sorozata *f-majdnem szubadditív,* ha

$$a(n+m) \leq a(n) + a(m) + f(n+m)$$

minden $m, n \geq 1$ egészre. De Bruijn es Erdős fent említett eredménye a Fekete-lemma általánosítása majdnem szubadditív sorozatokra.

A feladat azt mutatja meg, hogy a (2) feltétel nagyon közel van a lehető legjobbhoz, hiszen $f(x) = x/\log x$ esetén már létezik olyan f-majdnem szubadditív $a(n)$ sorozat, amelyre $(a(n)/n)$ „nagyon” nem konvergens.

Megoldotta Frankl Nóra, Nagy János, Williams Kada és — kis hiányosságtól eltekintve — Maga Balázs. Részeredményt ért el Ágoston Tamás. Nem tartalmaz érdemi eredményt egy dolgozat.

5. (A kitűző megoldását átdolgozta Keleti Tamás.) Legyen $f(x) = [x] + 5\{x\} - 2$ ha $\{x\} \in [1/5, 4/5]$, a kiegészítő intervallumokon lineárisan kiegészítve. Megmutatjuk, hogy ez a függvény jó.

Állítás. Legyen $b_0, b_1, \ldots$ olyan, egészekből álló sorozat, amelyben a szomszédos tagok különbsége legfeljebb 1. Ekkor van olyan $x \in (0,1)$, amelyre $[f^k(x)] = b_k$ minden $k = 0, 1, 2, \ldots$ egészre.

Bizonyítás. Legyen $d_k = b_k - b_{k-1}$, x pedig az a szám, amelynek egész része b_0, és ötös számrendszerben a k-adik jegye d_k+2. Könnyen látszik, hogy ez pont jó.

Állítás. Bármely, kétirányban végtelen $[0,1]$-beli (a_n) sorozathoz van olyan, egészekből álló $b_0, b_1, \ldots$ sorozat, amelyben a szomszédos tagok különbsége legfeljebb 1, és minden egész n-re az n-nel egyenlő b_k számok relatív gyakoriságának limsupja éppen a_n.

Bizonyítás. Legyen $b_0 = 0$. A további b_k értékeket a következőképpen konstruáljuk: föl-le sétálunk $\mathbb{Z}$-n úgy, hogy meg-megpihenve fellépegetünk 1-ig, aztán le (-1)-ig, aztán fel 2-ig, aztán le (-2)-ig, fel 3-ig, stb. Ha sehol sem pihennénk meg, akkor minden n-re 0-hoz tartana a relatív gyakoriság. Ezért minden n-re, mindig amikor n-ben járunk, pihenjünk meg olyan sokáig, hogy a relatív gyakoriság épp felmenjen a_n fölé, aztán menjünk tovább. Így megfelelő b_k sorozatot kapunk.

A két fenti Állítás alapján az f függvény kielégíti a feladatbeli követelményt.

Megoldotta Csernák Tamás, Fehér Zsombor Maga Balázs, valamint — apró hiányosságoktól eltekintve — Frankl Nóra és Nagy János. Jó kiinduló ötleteket írt Ágoston Tamás.

6. (Nagy János megoldása nyomán, aki észrevette, hogy a Riemann-féle $\zeta(s)$ függvény függvényegyenlete lényegében minden megkövetelt tulajdonságot magában foglal. A kitűzők közvetlen konstrukciót adtak.) c_1, c_2, … alkalmas pozitív abszolút kostansokat fog jelölni.

A szóban forgó függvényegyenlet azt mondja ki, hogy a

$$\xi(s) \stackrel{\text{def}}{=} s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

egészfüggvényre $\xi(s) = \xi(1-s)$, másszóval $\xi(s+1/2)$ páros egészfüggvény.

Olyan $F(s)$ páros egészfüggvényt kell konstruálnunk, amire

$$|F(s)| < c_1 \left|\frac{s^s}{e^s\sqrt{s}}\right| \qquad (\Re s \geq 0,\ |s| \geq 1),$$

hiszen a Stirling-formula komplex síkra való kiterjesztése szerint $|\Gamma(s)|$ a jobb félsíkban a jobb oldal két pozitív konstansszorosa közé esik, hacsak s el van határolva az origóban levő pólustól. Itt és a továbbiakban az s^α ($\Re s \geq 0$) komplex hatvány értelmezéséhez $\log s$-et mindig $|\arg s| \leq \pi/2$-lel definiáljuk. Ennek köszönhetően $s^{\alpha_1}s^{\alpha_2} = s^{\alpha_1+\alpha_2}$ minden további nélkül, és ha s_1, s_2, $s_1 s_2$ is a jobb félsíkba esik, akkor $\arg s_1 + \arg s_2 = \arg s_1 s_2$, ahonnan $s_1^\alpha s_2^\alpha = (s_1 s_2)^\alpha$, mint a valósban megszoktuk.

Első próbálkozásunk legyen a szintén páros egészfüggvény,

$$F_1(s) \stackrel{\text{def}}{=} \xi^2\left(s+\frac{1}{2}\right) = \left(s^2 - \frac{1}{4}\right)^2 \pi^{-s-\frac{1}{2}}\Gamma^2\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\right)\zeta^2\left(s+\frac{1}{2}\right).$$

Az első két tényező abszolút értéke,

$$\left|\left(s^2-\frac{1}{4}\right)^2\right| < c_2|s|^4 \quad (|s|\geq 1),$$

$$\left|\pi^{-s-\frac{1}{2}}\right| = c_3\pi^{-\Re s}.$$

Ismét a Γ-függvény említett becslése alapján a harmadiké,

$$\left|\Gamma^2\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\right)\right| < c_4\left|\frac{\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\right)^{s+\frac{1}{2}}}{e^{s+\frac{1}{2}}\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\right)}\right| =$$

$$c_4\left|\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)^s}{2^{s-\frac{1}{2}}e^{s+\frac{1}{2}}\sqrt{s+\frac{1}{2}}}\right| < c_5\left|\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)^s}{2^s e^s\sqrt{s}}\right| \quad (\Re s\geq 0).$$

Itt

$$\left(s+\frac{1}{2}\right)^s = s^s\left(1+\frac{1}{2s}\right)^s,$$

ahol

$$\left|\left(1+\frac{1}{2s}\right)^s\right| = \left|e^{s\log\left(1+\frac{1}{2s}\right)}\right| \leq e^{|s|\frac{c_6}{|s|}} = e^{c_6} \quad (\Re s\geq 0,\ |s|\geq 1).$$

Szinte triviális becsléssel $|\zeta(s)| < c_7\sqrt{|s|}$ $(\Re s\geq 1/2)$ — ez kisebb kitevővel is ismert, de a kitevőnek nem lesz lényeges szerepe —, ahonnan a negyedik tényező abszolút értéke,

$$\left|\zeta^2\left(s+\frac{1}{2}\right)\right| < c_8|s| \quad (\Re s\geq 0,\ |s|\geq 1).$$

Összeszorozva a négy tényezőt, látjuk, hogy $F_1(s)$ legfeljebb egy $|s|^5(2\pi)^{-\Re s}$ tényezővel lépi túl a megengedett korlátot.

$\sinh s/s = (e^s-e^{-s})/(2s)$ is páros egészfüggvény, ahol $|(e^s-e^{-s})/2|\leq e^{\Re s}$ $(\Re s\geq 0)$.

$$F(s)\overset{\text{def}}{=}F_1(s)\left(\frac{\sinh(as)}{s}\right)^5 \qquad \left(a\overset{\text{def}}{=}\frac{\log 2\pi}{5}\right)$$

tehát már kielégíti a feladat követelményeit.

Megjegyzés. Az csak a látszat, mintha $F_1(s)$ becslésében a $\Re s \to \infty$ esetén exponenciálisan csökkenő $(2\pi)^{-\Re s}$ tényezőnek lényeges szerepe lenne. Ha ott sem volna, $F_1(s)$ helyett $F_1^M(s/M)$-et véve egész M-mel, már megjelenne egy $M^{-\Re s}$ a becslésében, amivel tetszőleges M-hez konstruáltunk olyan $F(s)$ függvényt, amelyre még $F(s)M^s/\Gamma(s)$ is korlátos a jobb félsíkban. Egyszerű Phragmén–Lindelöf-típusú tétel mutatja viszont, hogy egyetlen függvény ezt nem tudja megtenni minden M-re.

Megoldotta — apró hiányosságoktól eltekintve — Nagy János.

7. Ha $L \in \mathbb{C}P^\infty$ a $\mathbb{C}^\infty$ vektortérnek egy egydimenziós altere, akkor a tautologikus nyaláb L feletti fibruma, definíció szerint, éppen L. Az r-szeres direkt összeg L feletti fibruma tehát $L^{\oplus r}$. Így az egységgömbnyaláb L feletti fibruma

$$\{(x_1, \ldots, x_r) : x_i \in L, |x_1|^2 + \cdots + |x_r|^2 = 1\}.$$

Mivel nem lehet $x_1, \ldots, x_r$ mindgyike a nullvektor, ezért ez az r vektor meghatározza az $L = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ alteret. Tehát az egységgömbnyaláb totális tere

$$E = \{(x_1, \ldots, x_r) : x_i \in \mathbb{C}^\infty \text{ egymás számszorosai}, |x_1|^2 + \cdots + |x_r|^2 = 1\}.$$

Az $(x_1, \ldots, x_r) \mapsto [x_1 : \cdots : x_r]$ hozzárendelés egy jóldefiniált, folytonos $\eta : E \to \mathbb{C}P^{r-1}$ leképezést határoz meg. Belátjuk, hogy η homotopikus ekvivalencia. Mivel S^∞ pontrahúzható, ezért elég belátni, hogy η lokálisan triviális nyaláb S^∞ fibrummal. Ehhez legyen

$$U_i = \{[z_1 : \cdots : z_n] \in \mathbb{C}P^{r-1} : z_i \neq 0\}.$$

Ekkor van olyan $U_i \times S^\infty \leftrightarrow \eta^{-1}(U_i)$ homeomorfizmus, amelynél a z feletti fibrumok egymásnak felelnek meg minden $z \in U_i$ esetén. Valóban, a direkt szorzat (z, v) pontjának feleljen meg a

$$\left(\frac{|z_i|}{|z|} \frac{z_j}{z_i} v \right)_{j=1}^{r}$$

vektor-r-es.

Megoldotta Ágoston Tamás és Nagy János. Részeredményt ért el Kiss Melinda. Hibás egy dolgozat.

8. (Laczkovich Miklós) Könnyen látható, hogy $n = 2$-re ilyen téglalap nincs. Belátjuk viszont, hogy minden $n > 2$-re van.

Legyen $x > 1$. Legyen $b_{-1} = 0$, $b_0 = 1$ és $b_{n+1} = xb_n + b_{n-1}$ minden $n > 1$-re. Könnyű ellenőrizni, hogy a $b_{n-1} \times b_n$ méretű T_n téglalap felbontható n darab $1 : x$ oldalarányú és különböző méretű téglalapra: mindig hozzáillesztünk egy $1 : x$ oldalarányú téglalapot az előzőhöz. Most illesszünk T_n hosszabbik (b_n hosszúságú) oldalához egy $b_n \times (b_n/x)$ méretű téglalapot. Legyen a kapott téglalap R_n. Csak azt kell ellenőrizni, hogy alkalmas $x > 1$-re R_n oldalainak aránya $1 : x$. Ezt nem nehéz ellenőrizni, ui. $x = 1$ esetén b_n az $(n + 1)$-edik Fibonacci-szám, és ekkor R_n oldalainak aránya $> 1 = x$, ha viszont x nagyon nagy, akkor könnyen láthatóan R_n oldalainak aránya $< 1 < x$. Mivel b_n az x paraméter folytonos függvénye (amit egyébként explicite is meg lehet adni), kell hogy legyen olyan $x > 1$, amelyre az arány x.

Az is világos, hogy a kapott $n + 1$ téglalap páronként nem egybevágó.

Megoldotta Ágoston Tamás, Csernák Tamás, Faragó János, Fehér Zsombor, Frankl Nóra, Kiss Melinda, Maga Balázs, Nagy János, Szőke Tamás és Williams Kada. Részeredményt ért el Ágoston Péter és Lenger Dániel. Nem tartalmaz érdemi eredményt egy dolgozat.

9. Legyen p_{d+1} egy további véletlenül választott pont a π eloszlás szerint, ekkor
$$\mathbb{E}(\pi(S(p_0, \dots, p_d))) = \Pr(p_{d+1} \in S(p_0, \dots, p_d)).$$
Mivel p_0, …, p_{d+1} eloszlása szimmetrikus, ezért a
$$\Pr(p_j \in S(p_0, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_{d+1}))$$
valószínűség nem függ j-től ($j = 0, \dots, d + 1$). Ezért elegendő belátni, hogy ennek a $d+2$ valószínűségnek az összege legalább 1. Ehhez pedig elegendő belátni, hogy biztosan van olyan j, amelyre
$$p_j \in S(p_0, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_{d+1}).$$
Mivel az $\binom{1}{p_i} \in \mathbb{R}^{d+1}$ vektorok lineárisan összefüggnek, ezért vannak olyan β_0, …, β_{d+1} valós számok, amelyek nem mind nullák, s melyekre
$$\sum_{i=0}^{d+1} \beta_i p_i = 0 \quad \text{és} \quad \sum_{i=0}^{d+1} \beta_i = 0.$$

Feltehetjük, hogy $\max_i |\beta_i| = 1$ és a(z egyik) maximális abszolút értékű β_i pozitív. Legyen ez β_j, ekkor tehát

$$\sum_{i \neq j} (-\beta_i) p_i = p_j, \quad \sum_{i \neq j} (-\beta_i) = 1 \quad \text{és} \quad -\beta_i \leq 1.$$

Így $p_j \in S(p_0, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_{d+1})$.

Megoldotta Ágoston Tamás és Nagy János.

10. **Első megoldás** (Nagy János megoldása nyomán). Legyenek p_1, p_2, $\ldots$, p_n tetszőleges pontok az S^2 egységgömbfelületen. Jelölje U az egyenletes eloszlást, Q_n pedig a p_i pontok által meghatározott tapasztalati eloszlást S^2-en. Legyen $-1 < t < 1$ esetén $\sigma(t) = \{x \in S^2 : x_1 \leq t\}$; ez az a gömbsüveg, amelynek szimmetriatengelye az első koordinátatengely, és a gömbfelület azon pontjait tartalmazza, amelyek első koordinátája legfeljebb t. Végül jelölje ν az $SO(3)$ forgatáscsoporton vett normált Haar-mértéket. Ekkor [K. B. Stolarsky: Sums of distances between points on a sphere II, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **41** (1973), 575–582, Theorem 2] szerint

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \|p_i - p_j\| + 4 \int_{-1}^{1} \int_{SO(3)} \big(Q_n(\Theta\sigma(t)) - U(\Theta\sigma(t))\big)^2 \nu(\mathrm{d}\Theta)\, \mathrm{d}t = E\|X - X'\|,$$

ahol $\|\,.\,\|$ az euklideszi távolság, továbbá X, X' függetlenek és egyenletes eloszlásúak a gömbfelületen.

Ha most $p_1, p_2, \ldots$ független, Q eloszlású véletlen pontok az S^2 gömbfelületen, akkor $n \to \infty$ esetén a fenti egyenlőség bal oldalának első tagja 1 valószínűséggel konvergál, és a határértéke $E\|Y - Y'\|$, ahol Y és Y' függetlenek és eloszlásuk Q. Ez pl. az U-statisztikákra vonatkozó nagy számok erős törvényének a következménye [Móri Tamás: *Diszkrét paraméterű martingálok*, Typotex, Budapest, 2011, 12.10. Tétel]. A második tagban $Q_n(\Theta\sigma(t)) \to Q(\Theta\sigma(t))$ majdnem biztosan, így a dominált konvergencia-tétel értelmében a második tag határértéke

$$4 \int_{-1}^{1} \int_{SO(3)} \big(Q(\Theta\sigma(t)) - U(\Theta\sigma(t))\big)^2 \nu(\mathrm{d}\Theta)\, \mathrm{d}t.$$

Mivel ez nemnegatív, azt kapjuk, hogy $E\|Y-Y'\| \leq E\|X-X'\|$, vagyis az egyenletes eloszlás maximalizál. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a Q eloszlás majdnem minden gömbsüvegen ugyanazt az értéket veszi fel, mint az egyenletes eloszlás. Megmutatjuk, hogy akkor Q nem lehet más, mint az egyenletes eloszlás. Legyen ε rögzített kis pozitív szám. Legyenek $G_1, G_2, \ldots, G_n$ olyan gömbsüvegek, amelyek páronként diszjunktak, legfeljebb ε átmérőjűek, $Q(G_i) = U(G_i)$, továbbá $G_0 = S^2 \setminus \cup_{i=1}^n G_i$-re $U(G_0) < \varepsilon$. Legyen Y eloszlása Q, legyenek az X_i valószínűségi változók függetlenek Y-tól és X_i egyenletes eloszlású G_i-n, $0 \leq i \leq n$. Definiáljuk X-et a következőképpen: ha $Y \in G_i$, akkor legyen $X = X_i$, $0 \leq i \leq n$. Ekkor X egyenletes eloszlású az S^2 gömbfelületen, és

$$P(\|X-Y\| > \varepsilon) \leq P(Y \in G_0) = Q(G_0) = U(G_0) < \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőlegesen kicsi lehet, azt kapjuk, hogy $Q = U$.

Második megoldás. Legyen P és Q két véges várható értékű valószínűségeloszlás $\mathbb{R}^d$ Borel-halmazain. Ekkor P és Q energia-távolsága a

$$D^2(P,Q) = 2\,E\|X-Y\| - E\|X-X'\| - E\|Y-Y'\|$$

mennyiség négyzetgyöke, ahol az X, X', Y, Y' valószínűségi (vektor)változók függetlenek, X és X' eloszlása P, Y és Y' eloszlása Q. Ez tehát nemnegatív, l. `https://en.wikipedia.org/wiki/Energy_distance`.

Legyen most P az egyenletes eloszlás az egységgömbfelületen, Q pedig tetszőleges eloszlás ugyanott. Az egyenletes eloszlás szimmetriatulajdonsága miatt az egységgömbfelület tetszőleges z pontja esetén $\|X-z\|$ eloszlása z-től függetlenül ugyanaz. Ezért tetszőleges, X-től független Z valószínűségi változó esetén, amely az értékeit az egységgömbfelületről veszi, $\|X-Z\|$ eloszlása is mindig ugyanaz. Következésképpen

$$\begin{aligned} 0 \leq D^2(P,Q) &= 2\,E\|X-Y\| - E\|X-X'\| - E\|Y-Y'\| \\ &= E\|X-X'\| - E\|Y-Y'\|, \end{aligned}$$

ami mutatja, hogy az egyenletes eloszlás adja a maximumot (és csak az).

Apró hiányosságtól eltekintve megoldotta Nagy János.